4.2.19 Slovní úlohy o pohybu III (Josef a Jarmila)

Předpoklady: 040218

Př. 1: Jarmilka sebrala Pepíčkovi bábovičku. Pepíček vstal, rozhlédl se po mamince a když ji konečně spatřil, jak se v dálce 30 m baví s maminkou té samé hnusné Jarmilky, která mu tak ublížila, neschopen dále snášet všechnu tu nespravedlnost světa rozběhl se svou maximální rychlostí 1,2 m/s a ohromným řevem za tou, která místo toho, aby ho ochránila před zákeřnou násilnicí, se chichotá hloupým tlachům matky určitě stejně prohnilé jako její zvrhlá dcera. Vyhrál. Maminka sebou trhla, rozhlédla se a přesně 5 sekund po začátku jeho srdceryvného představení se mu rozběhla v ústrety rychlosti ještě o 0,4 m/s větší než dvojnásobek toho, jak dokázal běžet on. Kolik sekund ještě uplynulo než se ocitl v konejšivé náruči své maminky?

Pro Pepíčka používáme index *P*, pro maminku index *M*.

Rychlost Pepíčka: $v_P = 1,2$ m/s

Rychlost maminky o 0,4 m/s větši než rychlost Pepíčka: $2 \cdot 1,2 + 0,4$ m/s $= 2,8$ m/s

V okamžiku, kdy se Pepíček ocitl v konejšivé náruči své maminky, urazili dohromady 30 metrů: $s_P + s_M = 30$.

Dosadíme ze vzorce pro rychlost: $v_P t_P + v_M t_M = 30$

Dosadíme známé hodnoty: $1,2 t_P + 2,8 t_M = 30$.

Vztah mezi délkou pohybu Pepíčka a maminky: $t_P = t_M + 5$.

$1,2\left(t_M + 5\right) + 2,8 t_M = 30$

$1,2 t_M + 6 + 2,8 t_M = 30 \quad / -6$

$4 t_M = 24 \quad / :4$

$t_M = 6$ s maminka běžela 6 s

Od chvíle, kdy maminka vyběhla Pepíčkovi naproti, uplynulo 6 s než se Pepíček dostal do bezpečí.

Př. 2: Nezletilý Josef P. se vydal večer po žluté turistické značce hledat stejně starou nezletilou Jarmilu M.. Když se mu po hodině a čtyřiceti minutách chůze nepodařilo hledanou Jarmilu M. najít, rozhodl se vrátit zpátky rychlostí větší o 1,5 km/h. Takto byl po 45 minutách nalezen hlídkou 3 km od tábora. Je třeba vypátrat, v jaké vzdálenosti od tábora se začal vracet, protože zřejmě v tomto okamžiku vytrousil klíče od táborové kuchyně.

Pro cestu tam používáme index 1, pro cestu zpět index 2.

Cesta tam … $1\text{ h } 40\text{ min} = 1 + \frac{40}{60}\text{ h} = 1 + \frac{2}{3}\text{ h} = \frac{5}{3}\text{ h}$

Cesta zpět … $45\text{ min} = \frac{45}{60}\text{ h} = \frac{3}{4}\text{ h}$

Při cestě zpátky ho hlídka našla 3 km od tábora $\Rightarrow$ při cestě zpět ušel o 3 km méně než při cestě tam: $s_1 - s_2 = 3$.

Dosadíme ze vzorce pro rychlost: $v_1 t_1 - v_2 t_2 = 3$

Dosadíme známé hodnoty: $v_1 \cdot \frac{5}{3} - v_2 \cdot \frac{3}{4} = 3$.

Zpátky se vracel rychlostí o 1,5 km/h menší: $v_2 = v_1 + 1{,}5$.

Dosadíme: $\frac{5}{3} v_1 - \left(v_1 + \frac{3}{2} \right) \cdot \frac{3}{4} = 3$

$\frac{5}{3} v_1 - \frac{3}{4} v_1 - \frac{9}{8} = 3 \qquad / \cdot 24$

$40 v_1 - 18 v_1 - 27 = 72 \qquad / +27$

$22 v_1 = 99 \qquad / : 22$

$v_1 = \frac{99}{22}\ \text{km/h} = \frac{9}{2}\ \text{km/h} = 4{,}5\ \text{km/h}$

Místo, kde se Josef otáčel: $s = v_1 t_1 = \frac{9}{2} \cdot \frac{5}{3}\ \text{km} = \frac{15}{2}\ \text{km} = 7{,}5\ \text{km}$

Josef P. se začal vracet ve vzdálenosti 7,5 km od tábora.

Př. 3: „Tatí, tatí vyhrál jsem osmistovku:" křičí Pepa. „Jarmila sice skoro celou dobu běžela asi o 1 m/s rychleji než já, ale tak 80 m před cílem úplně zkolabovala a do cíle se dobelhala třetinovou rychlostí, takže jsme v cíli byli najednou. Hele, nedalo by se spočítat, jak rychle jsem běžel?“

Pro Pepu používáme index *P*, pro Jarmilu index *J*.

Pepa s Jarmilou doběhli najednou $\Rightarrow$ platí:

- $s_P = s_J = 800\ \text{m}$ (to nevypadá moc výhodně),
- $t_P = t_J = t_{J1} + t_{J2}$ (to využijeme, protože to dobře popisuje pohyb jako celek)

Dosadíme ze vzorce pro rychlost: $\frac{800}{v_P} = \frac{720}{v_{J1}} + \frac{80}{v_{J2}}$

Hledáme vztahy mezi rychlostmi:

- Jarmila sice skoro celou dobu běžela asi o 1 m/s: $v_P = v_{J1} - 1$,
- Jarmila se do cíle se dobelhala třetinovou rychlostí: $v_{J2} = \frac{1}{3} v_{J1}$

Dosadíme: $\frac{800}{v_{J1} - 1} = \frac{720}{v_{J1}} + \frac{80}{\frac{1}{3} v_{J1}}$

Zrušíme indexy a upravíme složený zlomek: $\frac{800}{v-1} = \frac{720}{v} + \frac{240}{v} \qquad / : 80$

$\frac{10}{v-1} = \frac{9}{v} + \frac{3}{v} = \frac{12}{v} \qquad / \cdot v(v-1)$

$10v = 12(v-1)$

$10v = 12v - 12 \qquad / -10v + 12$

$12 = 2v \quad / : 2$

$v_{J1} = 6\ \text{m/s}$

$v_P = v_{J1} - 1 = 6 - 1\ \text{m/s} = 5\ \text{m/s}$

Pepa běžel rychlostí 5 m/s.

Př. 4: Ó Jarmilo,
tak blízká a tak vzdálená, jsi lásko moje jediná,
osmnáct kilometrů ode mne jsi jen, přesto vzdálenější nežli sen,
však srdce mé již k Tobě běží, cokoliv zastaví ho stěží,
být pomalejší o tři kilometry za hodinu, včas v náruči Tvé nespočinu,
proti plánu, jenž můj je azimut, zpozdil bych o osmnáct minut.
Ta shoda jasná má mne těšit, strašit nebo mást? Kilometrů, let i minut osmnáct.
Mysli na mě, nespi, nečti. Mou plánovanou rychlost spočti.

Pro vysněný pohyb používáme index *S*, pro pomalejší index *P*.

Pro oba pohyby platí: $s_S = s_P = 18\ \text{km} \Rightarrow$ musíme začít od rovnice pro čas nebo od rovnice pro rychlost. Protože máme určit rychlost a z výchozí rovnice budeme vyjadřovat, vyjdeme od rovnice pro čas.

Zpozdil bych se o 18 minut: $t_P = t_S + \frac{18}{60} = t_S + \frac{3}{10}$.

Dosadíme ze vzorce: $t = \frac{s}{v}$: $\frac{18}{v_P} = \frac{18}{v_S} + \frac{3}{10}$.

Hledáme vztah mezi rychlostmi: být pomalejší o tři kilometry za hodinu: $v_P = v_S - 3$.

Dosadíme: $\frac{18}{v-3} = \frac{18}{v} + \frac{3}{10} \qquad / \cdot 10 \cdot (v-3) \cdot v$

$180v = 180(v-3) + 3 \cdot (v-3) \cdot v$

$180v = 180v - 540 + 3v^2 - 9v$

$3v^2 - 9v - 540 = 0 \quad / : 3$

$v^2 - 3v - 180 = 0$

$(v-15)(v+12) = 0$

$v_1 = 15$, $v = -12$ (nemá význam)

Pepa si vysnil rychlost 15 m/s.

Př. 5: Karle, prosím Tě, hoď mi to do Wolframu. Jája rodí a další aerotaxi je volný až o tří minuty pozdějc než ti tragédi slíbili. Jo, já vím, že to bude pěkně drahý, když nastavím vyšší cestovní rychlost, ale nemůžu ji tam nechat. Musím těch 125 km stihnout včas, abych chytil městskou. Už to máš? O 125 km/h víc? No a kolik to teda bude? Nějak mi to vypadlo. Co říkáš? Slyšíš mě? Nééé. Pitomá baterka.

Pro plánovaný pohyb používáme index *P*, pro rychlejší index *R*.

Pro oba pohyby platí: $s_P = s_R = 125\text{ km} \Rightarrow$ musíme začít od rovnice pro čas nebo od rovnice pro rychlost. Protože máme určit rychlost a z výchozí rovnice budeme vyjadřovat, vyjdeme od rovnice pro čas.

Aerotaxi je volný až o tři minuty později: $t_P = t_R + \frac{3}{60} = t_R + \frac{1}{20}$.

Dosadíme ze vzorce: $t = \frac{s}{v}$: $\frac{125}{v_P} = \frac{125}{v_R} + \frac{1}{20}$.

Hledáme vztah mezi rychlostmi: 0 125 km/h víc?: $v_P + 125 = v_R$.

Dosadíme: $\frac{125}{v_P} = \frac{125}{v_P + 125} + \frac{1}{20}$ $\quad / \cdot 20 \cdot v_P \cdot \left(v_p + 125\right)$

$$125 \cdot 20 \cdot \left(v_P + 125\right) = 125 \cdot 20 \cdot v_P + v_P\left(v_p + 125\right)$$

$$20 \cdot 125^2 = v_P^2 + 125 v_p$$

$$v_P^2 + 125 v_p - 20 \cdot 125^2 = 0$$

$$v_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a} = \frac{-125 \pm \sqrt{125^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-20 \cdot 125^2\right)}}{2 \cdot 1} = \frac{-125 \pm \sqrt{125^2\left(1 + 4 \cdot 20\right)}}{2} =$$

$$= \frac{-125 \pm 125\sqrt{81}}{2} = \frac{-125 \pm 125 \cdot 9}{2} = \frac{125\left(-1 \pm 9\right)}{2}$$

$$v_1 = \frac{125\left(-1+9\right)}{2} = 125 \cdot \frac{8}{2} = 125 \cdot 4 = 500 \qquad v_2 = \frac{125\left(-1-9\right)}{2} = 125 \cdot \left(-\frac{10}{2}\right) = 125 \cdot 5 = -625$$

$$v_R = v_P + 125 = 500 + 125\text{ km/h} = 625\text{ km/h}$$

Pepa plánoval cestovat pomocí aerotaxi rychlostí 500 km/h, kvůli zpoždění jeho přistavení, musel zrychlit na 625 km/h.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad má dva zajímavé rysy: dosazení neroznásobeného tvaru koeficientu *c*, které umožňuje bez problémů spočítat výsledek i bez kalkulačky a rozdíl obou hledaných rychlostí. Na zkrácení cesty dlouho 125 km o pouhé 3 minuty je nutné zvýšit rychlost z 500 km/h na 625 km/h. Což je daleko více než běžný odhad.

Př. 6: Josef se protáhl brankou a do očí se mu draly slzy. Věděl, že od Jarmilky ho dělí už jen 75 m - dvě a tři čtvrtě minuty chůze. Chodil sem za ní každý týden už více než tři roky, ale pořád si ještě nezvykl, že na něj čeká tam, místo toho, aby mu pomáhala za vrátky do kopečka před tím, než zahne kolmo doprava po cestičce mezi hroby. Takhle opuštěný byl pomalejší a šoural se do kopce rychlosti jen 0,5 m/s. Až po zatočení na rovince dokáže zrychlit na 0,8 m/s. No což alespoň bude mít dost času si rozmyslet, co všechno ji řekne. Vždyť ani neví, že Jarmilčině Pepíkovi se narodila malá Jarmilka a že každý říká, že nos, nos má úplně jak prababička. „Škoda, že ses toho nedočkala" vzdychl si, „kdo by to řekl, že teď devadesát let po tom, co jsi mi ukradla tu bábovičku a já před Tebou utekl k mámě, se budu za Tebou do kopce belhat každý týden celých …. Ksakru, už jsem zase zapomněl, jak dlouho mi to bude trvat“.

Pro pohyb do kopce používáme index *K*, pro pohyb po rovince index *R*.

Ze zadání je zřejmé, že od vrátek k hrobu nevede přímá cesta, ale je nutné jít „po odvěsnách“ pravoúhlého trojúhelníku s vrcholy v hrobu, ve vrátkách a v místě, kde se po chůzi do kopce zatáčí doprava. Vzdálenost mezi vrátky a hrobem je přeponou tohoto trojúhelníku.

Z Pythagorovy věty: $s_K^2 + s_R^2 = 75^2$.

Dosadíme $s = vt$: $(v_K t_K)^2 + (v_R t_R)^2 = 75^2$.

Dosadíme známé hodnoty: $(0,5 \cdot t_K)^2 + (0,8 \cdot t_R)^2 = 75^2$.

Umocníme závorky: $0,25 t_K^2 + 0,64 t_R^2 = 75^2$

Hledáme vztah mezi časy t_K a t_R: dělí ho 2 a tři čtvrtě minuty chůze:

$t_K + t_R = 120 + 45 = 165$.

Chceme znát dobu cesty do kopce $\Rightarrow$ vyjádříme dobu cesty po rovině: $t_R = 165 - t_K$.

Dosadíme a zrušíme index: $0,25 \cdot t^2 + 0,64(165 - t)^2 = 75^2$.

$$0,25 \cdot t^2 + 0,64\left(165^2 - 2 \cdot 165t + t^2\right) = 75^2$$

$$0,25 \cdot t^2 + 0,64\left(27225 - 330t + t^2\right) = 5625$$

$$0,25 \cdot t^2 + 17424 - 211,2t + 0,64t^2 = 5625 \qquad / -5625$$

$$0,25 \cdot t^2 + 17424 - 211,2t + 0,64t^2 = 5625 \qquad / -5625$$

$$0,89 \cdot t^2 - 211,2t + 11799 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a} = \frac{-(-211,2) \pm \sqrt{(-211,2)^2 - 4 \cdot 0,89 \cdot 11\,799}}{2 \cdot 0,89} =$$

$$= \frac{211,2 \pm \sqrt{44\,605,44 - 42\,004,44}}{1,78} = \frac{211,2 \pm \sqrt{2\,601}}{1,78} = \frac{211,2 \pm 51}{1,78}$$

$$t_1 = \frac{211,2 + 51}{1,78} = \frac{262,2}{1,78} = 147\frac{27}{89} \qquad t_2 = \frac{211,2 - 51}{1,78} = \frac{160,2}{1,78} = 90$$

Josef šel do kopce 90 s nebo 147,3 s (příklad má dvě řešení).

Př. 7: Projdi si hodiny, ve kterých jsme se věnovali slovním úlohám. Jaké speciální typy úloh jsme řešili? Jaké postupy a triky jsme při tom používali? Na co jsme si měli dávat pozor.

Shrnutí: I když Ti Jarmilka sebere bábovičku, může být jednou Tvoji ženou.